23 空間座標とベクトル

例題 空間座標と空間ベクトル

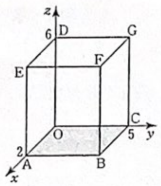
右の図のような直方体において，次の問いに答えよ。

(1) 点Fの座標を求めよ。

(2) xy 平面について点Fと対称な点Hの座標を求めよ。

(3) 2点B，E間の距離を求めよ。

(4) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{EC}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。



解 (1) F(2, 5, 6)

(2) 右の図より　H(2, 5, −6)

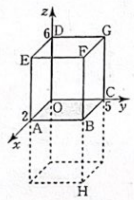
(3) B(2, 5, 0)，E(2, 0, 6) であるから

$BE=\sqrt{(2-2)^2+(0-5)^2+(6-0)^2}=\sqrt{61}$

(4) $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ であり

$\overrightarrow{EA}=-\vec{c}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=-\vec{a}$

だから　$\overrightarrow{EC}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$



◇2点間の距離

2点 $P(x_1, y_1, z_1)$，$Q(x_2, y_2, z_2)$ 間の距離は

$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

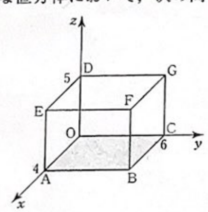
とくに原点Oと点Pとの距離は

$OP=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$

類題

123. 右の図のような直方体において，次の問いに答えよ。

(1) 点E，F，Gの座標を求めよ。



(2) xy 平面について点Fと対称な点Hの座標を求めよ。

(3) yz 平面について点Fと対称な点Iの座標を求めよ。

(4) 原点Oについて点Fと対称な点Jの座標を求めよ。

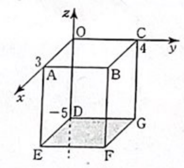
(5) 2点B，D間の距離を求めよ。

(6) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OF}$，$\overrightarrow{EC}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

Exercise

124. 右の図のような直方体において，次の問いに答えよ。

(1) 点F，Gの座標を求めよ。



(2) xz 平面について点Fと対称な点Hの座標を求めよ。

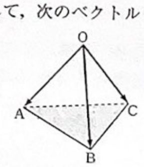
(3) 点Dについて点Fと対称な点Iの座標を求めよ。

(4) 対角線AGの長さを求めよ。

(5) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{AG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

125. 右の四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ として，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(1) $\overrightarrow{AB}$

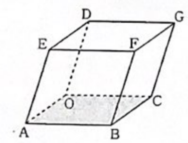


(2) $\overrightarrow{CB}$

(3) 辺ABの中点をMとするとき，$\overrightarrow{AM}$

126. 右の図の平行六面体において，次の問いに答えよ。ただし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{c}$ とする。

(1) $\vec{a}$ で表される $\overrightarrow{OA}$ 以外のベクトルをすべてかけ。



(2) $\vec{a}+\vec{b}$ で表されるベクトルをすべてかけ。

(3) $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OG}$，$\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(4) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OG}=2\overrightarrow{OF}$ であることを証明せよ。

JUMP 問題 **126** において，$\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{OC}$ であることを示せ。

16 直線上の点

例題 直線上の点

数直線上の2点 A(-3), B(7) について，次の問いに答えよ。

(1) 2点A，B間の距離を求めよ。

(2) 線分ABを3：2に内分する点Cの座標を求めよ。

(3) 線分ABを3：2に外分する点D，および2：3に外分する点Eの座標をそれぞれ求めよ。

解 (1) $AB=|7-(-3)|=|10|=10$

(2) $\dfrac{2\times(-3)+3\times7}{3+2}=\dfrac{15}{5}=3$

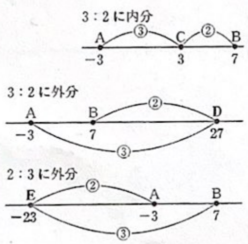
より　C(3)

(3) $\dfrac{-2\times(-3)+3\times7}{3-2}=27$

より　D(27)

$\dfrac{-3\times(-3)+2\times7}{2-3}=-23$

より　E(-23)

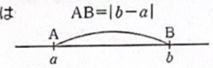


◆数直線上の点と座標

数直線上の点Pに実数 a が対応しているとき，a を点Pの座標といい，点Pを P(a) で表す。

◆2点間の距離

2点 A(a), B(b) の間の距離ABは　$AB=|b-a|$



◆内分点と外分点の座標

2点 A(a), B(b) に対して，線分ABを $m:n$ に内分する点の座標は

$\dfrac{na+mb}{m+n}$

特に，線分ABの中点の座標は

$\dfrac{a+b}{2}$

$m:n$ に外分する点の座標は

$\dfrac{-na+mb}{m-n}$

(内分点の公式で n を $-n$ におきかえた式)

類題

85. 次の2点間の距離を求めよ。

(1) A(0), B(-5)

(2) A(-7), B(-5)

(3) A(3), B(-9)

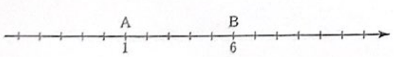
86. 下の数直線上に線分ABを次のように分ける点を図示せよ。

(1) 3：2に内分する点C

(2) 2：3に内分する点D

(3) 1：2に外分する点E

(4) 2：1に外分する点F



87. 2点 A(-1), B(5) に対して，次の点の座標を求めよ。

(1) 線分ABを5：1に内分する点C

(2) 線分ABの中点D

(3) 線分ABを3：2に外分する点E

(4) 線分ABを3：7に外分する点F

Exercise

88. 2点 A(1), B(6) について，次の問いに答えよ。

(1) 点P(4)に対して，距離AP，BPをそれぞれ求めよ。また，点Pは線分ABをどのような比に内分または外分する点であるか。

(2) 点Q(-9)に対して，距離AQ，BQをそれぞれ求めよ。また，点Qは線分ABをどのような比に内分または外分する点であるか。

89. 2点 A(-3), B(9) に対して，次の点の座標を求めよ。

(1) 線分ABを1：2に内分する点C

(2) 線分ABを1：2に外分する点D

90. 2点 A(-2), B(7) に対して，線分ABを4：5に内分する点Qと外分する点Rとの距離QRを求めよ。

91. 2点 A(-7), B(-2) について，次の問いに答えよ。

(1) 線分ABを3：2に内分する点Cの座標を求めよ。

(2) 線分ABの中点Mの座標を求めよ。

(3) 線分ABを5：2に外分する点Dの座標を求めよ。

(4) 2点A，D間および2点D，B間の距離を求めよ。

92. 2点 A(3), B(b) に対して，線分ABを4：3に内分する点の座標が7であった。b を求めよ。

JUMP

2点 A(-2), B(b) について，線分ABの3等分点の1つが点C(3)であった。b の値と，もう1つの3等分点の座標を求めよ。