

# 数学的な見方や考え方に着目して よりよい問題解決の方法を見いだしていく学習の創造 —事象と数学のつながりを意識した学習を通して—

（実践者） 富永 剛志

## 1 研究テーマ設定の理由

昨年度より、持続可能な社会を形成する生徒を育成するために上記の主題で研究を進めてきた。その成果と課題として、授業における様々な事象について解決の方法を修正・改善しながら問題解決を図っていくことはできるが、以降に出会う事象について、主体的に獲得した問題解決の方法を活用し、解決の構想を立てて解決したり、解決の過程や方法を筋道立てて分かりやすく伝えたりする力を十分に身に付けるまでには至っていなかった。

そこで今年度は、問題把握の場面において、論理的に思考し表現する学び合いを通して、数学的な見方や考え方に着目して事象を数理的に捉えさせることで、よりよく事象と数学をつなげて問題解決の方法を見いだしていくことができると考え、サブテーマ「—事象と数学のつながりを意識した学習を通して—」を加えた本研究テーマを設定した。

## 2 研究の内容及び方法

### (1) 論理的な思考や表現を豊かにする言語技術の在り方

事象を数理的に捉え、自分の考えを論理的に整理して表現し、筋道立った問題解決につなげるための「数学らしい言語技術」の在り方を問題把握の場面における問答ゲームから探る。

### (2) 問題解決に関わる要素、数学的な見方や考え方に着目した振り返りとまとめ

問題解決を通じた振り返りと数学的な見方や考え方をつなげてまとめる「まとめノート」を作成させることで、生徒が論理的な思考を意識し、よりよく問題解決の方法を修正・改善していくことを価値として認識できるようにする。

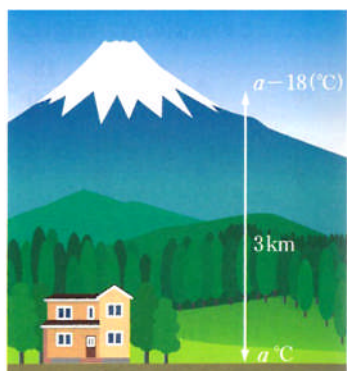
### (3) 指導の実際

## 3 研究の実際

### (1) 論理的な思考や表現を豊かにする言語技術の在り方

昨年度より全校で行ってきた、論理的に思考し表現するための「問答ゲーム」を、事象を数理的に捉える問題把握の場面で取り入れた。6W1H（いつ、どこで、誰が、何を、なぜ、何のために、どのように）を意識した把握、質問、自己内対話を行うことによって、問題の本質である重要な要素に着目できると考えたからである。

例えば、下の図のような、中学1年の「文字の式」における代入の問題について、絵から読み取れる状況を問答ゲームで明らかにした。



どこの場所ですか？ → 3 kmより高い山で、雪がかかっているから、富士山です。

いつの季節のことですか？ → 木は緑だから、秋や冬ではない。山頂に雪があるから、夏ではない。だから、春です。

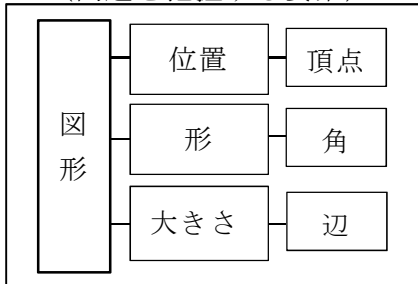
平地の気温は何度ですか？ → 3 km上空を示す矢印の先が、ちょうど雪があるところとないところの境界にあるから、3 km上空の気温が0℃だと考えられる。だから、 $0 + 18 = 18$  平地の気温は18℃だと考えられる。

それは本当に正しいのですか？ → aに18をあてはめたら、 $18 - 18 = 0$  になるから、正しいです。

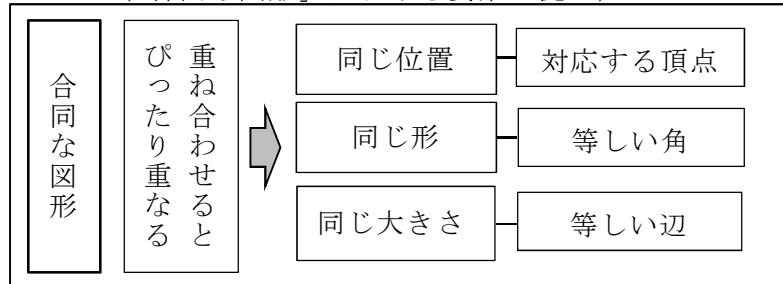
6W1Hを意識した問題場面の把握は、単にaにいろいろな値を代入する処理の学習から、問題を数理的に捉え、その問題を解決するために用いる知識や技能の学習として理解されていく。

上記のような取組を、2年「図形の調べ方」における問題把握の場面で行い、解決に必要な要素を見いだす学習を行った。学習を通して生徒は図形を把握する要素を下のように捉えた。

(問題を把握する要素)



(「合同な図形」における要素の捉え)



これらの要素を基にして、生徒は図形の性質を説明する際に、「何に着目をして」「どのような方法で」解決していけばよいか見通しを立て、図形の性質を探っていく。

## (2) 問題解決に関わる要素、数学的な見方や考え方に着目した振り返りとまとめ

家庭学習として、その日の学習内容のポイントをまとめることの他に、解決に関わる重要な要素や、できるようになったよりよい数学的な見方や考え方について振り返らせる「まとめノート」を作成させた。

図形の性質を論理的に説明する方法とは？  
論理的…筋道を立てて分かりやすく。

左の図で向かい合う角がとを説明する。(aとcで考える。)

順序

① 直線m 直線l 角aとc  
 ・角は180° ・角は180°  
 ・180° = a + b    ・180° = b + c  
 ↓  
 ・a = c

まず直線mを基準とすると直線なので角度は180°ということになりaの角度は180° - bになります。次に直線lを基準にすると同じように角度は180°になりcの角度は180° - bになります。どちらの場合も角度が180° - bにな、たのでa = cで向かい合う角が等しいことが分かります。

aが40°だった場合…  
 180° - a = 140° … b  
 180° - b = 40° … c  
 a = 40°    c = 40° → a = c

→文字を使っているので、どんな場合でも成り立つ

**まとめノートの作り方**

- ① 日付と学習課題(先生が黒板に書くそのままのもの)をはじめに必ず書く。
- ② その学習課題に答えるようなまとめにする。
- ③ 答え方は、論理的に書く。**【ここが一番大事】**  
 ・～すればいい(と思う)。それは、～だから(その理由は、～だから)。  
 ・より「速く」「簡単に」「正確に」できる方法や考え方ははっきりさせる。  
 ・その方法や考え方のよさを見つける。
- ④ 論理的に答える際には、それがよく分かるような例(図、表、式、グラフなど)があるとうい。
- ⑤ そのよりよい方法が、練習して使えることを確かめる。(1～2問でよい)
- ⑥ 感想を書く。感想は、まとめた解決の方法や考え方のよさに気づいたり、これまでの解決の方法や考え方が授業でこんなに変わった・よくなったということを書く。
- ⑦ 大事なところやつながることは、色で書いたり囲んだり、矢印でつなげたりしよう。ただし、色を使いすぎると逆にノートが見えにくくなるので、本当に大事なところしよう。

要素に着目した考え方の整理をしている

要素、数学的な見方や考え方に着目した問題解決の方法をまとめている

要素を大事なものから順に捉えて書き出し、その要素の中にある具体的なことを大きなものから見つけていく。そして、それを参考に文章にまとめて説明する。その際に本当に正しいのかを検証すると説明の説得力が更にupする。Good!!!

感想  
 始めてまとめノートを作ったけれど、授業だけでは分かりにくか、たところも自分でよく考えることができて学習内容がより深ま、たと思います。

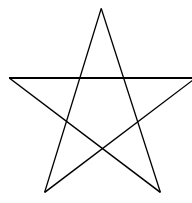
資料1 まとめノートの作り方と生徒のまとめノート

(3) 指導の実際 【2年「図形の調べ方」におけるパフォーマンス課題】

(7) 指導計画（「逆向き設計論」に基づく指導計画 ※一部抜粋）

研究主題を具現化するための指導計画			
教科領域名	数学	指導者	富永剛志
单元名: 図形の調べ方 (2年)		時数: 全13時間	実施時期: 平成29年10月
第1段階: 求められている結果			
本单元(2学期)における設定されている目標:			【G】goals
(a) 研究テーマに対して:			
図形の性質について、図形の要素に着目しつつ、その性質を見いだしたり、論理的に証明することができる。また、論理的に証明する手順や手法について理解し、数学的な見方や考え方を利用して問題を解決することができる。			
(b) 「論理的に思考し表現する力」に対して:			
数学的な表現を用いて、要素や根拠を明らかにして筋道を立てて説明することができる。			
理解:	【U】understanding	本質的な問い:	【Q】questions
図形にひそむ性質は、その要素に着目して、いくつかの事例から共通点を見いだすことで明らかになる。また、その正しさは、根拠となる事柄から演繹的に一般性を証明することで保障され、新たな性質を証明する際の根拠となっていく。		図形にひそむ性質を見いだしたり、その正しさを証明するためにはどのような手法や手順を用いて進めればよいか。	
生徒は次のことを知る	【k】knowledge	生徒は次のことができるようになる	【S】skills(a)
事象にひそむ性質を見だし証明する際には、帰納・類推・演繹の考え方を活用して解決していくことが重要であり、数学的な表現を用いて簡潔に表現することは数学における問題解決の中核手順である。		(a)について	
		事象にひそむ性質を見いだしたり、その正しさを保障するために、帰納・類推・演繹の考え方を活用して解決に向かうこと。	
生徒は次のことができるようになる			【S】skills(b)
(b)について			
図形にひそむ要素に着目して問題を把握することで、問題解決に関わるより重要な要素を基に性質を明らかにしていくことができる。また、図に印を入れる等の証明を支える工夫を行い、より論理的な証明にすることができる。			
第2段階: 評価のための証拠			
【パフォーマンス課題】			
星形五角形の5つの角について、どんなことがいえるのか予想し、それがいつも成り立つことを説明しなさい。			
(a)に対して	【T】tasks (a)	他の根拠	【OE】other evidence(a)
パフォーマンス課題における記述 ○いくつかの例から共通した図形の性質を予想することができる。 ○既習事項を根拠として、見いだした性質を演繹的に説明することができる。		小集団の観察 ワークシートの記述 ノート、まとめノートの記述 アンケートにおける評価・記述	
(b)に対して	【T】tasks (b)	他の根拠	【OE】other evidence
パフォーマンス課題における記述 ○重要な要素を見だし解決の方針を立てている。 ○方針に基づき、性質が成り立つ根拠を要素に着目しながら図や式、言葉を用いて説明することができる。 ○論理的に筋道立った説明から結論を示している。		問答ゲームにおける生徒の発言 小集団の観察 ワークシートの記述 ノート、まとめノートの記述 アンケートにおける評価・記述	

(4) 展開（問題を把握し、解決の見通しを立てる場面を抜粋）

T 教師の働きかけ S 生徒の反応	○指導の工夫 ◇評価
<p>学習課題：星形五角形の5つの角について、どんなことがいえるだろう？</p> <p>T：図のような、「星形五角形」を見て、どんなことがいえますか？</p> <p>S：今までの三角形，四角形，五角形とは形が違う。</p> <p>S：まわりに三角形が5つあります。中に五角形があります。</p> <p>S：5つのまわりの三角形の他に、大きな三角形も見えます。</p> <p>T：5つの角について、どんなことがいえるかな。</p> <p>S：それぞれ30°くらい。</p>	

S : 今まで和を求めてきたから,, , たしたら  $180^\circ$ くらい。

T : それは本当かな。

S : 分度器で測ったら,  $180^\circ$ になりました。

T : それは, どんな星形五角形でもいえるのかな。調べてみよう。星形五角形の角の和が  $180^\circ$ になることについて, 班で問答ゲームを行い, 問題を把握し, 解決の見通しを立てよう。

### 【問答ゲーム】

角の和とありますが, どうやって求めるのですか? (和の解釈)

○正星形五角形だったら, 角が求まるから和が計算で求められます。

○それは, いつもいえる方法にはならないよ。

○図形だと, 「和」というのは「集める」ことだから, どこかに集めます。

どうやって集めるのですか? (方法)

○三角形や五角形が見えるので, 内角や外角の性質を使って角を移したり集めたりします。

○平行線の性質を使って, 錯角や同位角を用いて角を移して集めます。

$180^\circ$ はどこにあるのですか? (要素の確認)

○ $180^\circ$ というの, 三角形の内角の和と同じだから, 三角形の中に角を集めるとよいと思います。

○ $180^\circ$ というの, 直線上にできる角だから, 直線上に角を集めるとよいと思います。

○解決の見通しをまとめると, 「 $180^\circ$ というの, 三角形の内角の和や直線上の角で, 和を求めるとは角を集めるということだから, 5つの角を三角形や直線上に集めるとよいです。角を集めるには, 三角形や多角形の内角・外角の性質などを用います。」

T : それぞれの方針で, どんな星形五角形でもいえることを説明してみよう。

※ \_\_\_\_\_ は, 要素を見いだして解決の見通しを立てることができている部分

○図形をじっくり観察させ, 問題にひそむ要素を挙げさせた。

○問題を解決するために重要な要素は何かを明確にするために, 班で問答ゲームを用いて話し合わせた。

◇重要な要素を見いだし解決の見通しを立てることができたか。(観察・ワークシート)



### (ウ) ルーブリックによる評価 (第2学年76人対象)

評価	記述語	結果(人)
A	問題の要素に着目して論理的に解決の方針を立てることができ, その方針に基づいて図や式, 言葉を用いて筋道立った説明ができる。	48
B	問題の要素に着目して解決の方針を立てることができ, その方針に基づいて図や式, 言葉を用いて説明ができる。	25
C	問題の要素を見つけることができず, 解決の方針を立てることができない。	3

学習課題 五角形の角の和は何度に等しいだろうか?

(予題)  
角の和は、 $180^\circ$ になりそう!!  $\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e = 180^\circ$

(解決の見通しを立てよう)  
最初に、線分CD間のどこに補助線をひいて△ACDをつくる。  
△ACDに五角形の角の和をつくるためには、あと∠bと∠eが必要。  
そのために、対頂角を作ると、180°-対頂角=残りの2つの角になる性質  
を利用し、 $\angle b + \angle e = \angle f + \angle g$ をつくる。

要素に着目した  
論理的な方針

筋道立った説明

図に印など工夫

他の生徒の説明を聞いてまとめる

①  $540^\circ - 180^\circ \times 5 = 180^\circ$   
△の内角の和を引くと∠bと∠eの部分を引すぎしてしまう。本来は赤色の角だけを引けば、∠bと∠eが引かれている。∠bは全て引くと540°になる。(→対頂角に等しい五角形ができるから)よってその分を引くと角の和が180°になる

②  $360^\circ - 180^\circ \times 5 + 540^\circ = 180^\circ$   
 $180^\circ \times 5 = 900^\circ$  ← △の内角の和の和  
 $900^\circ - (360^\circ \times 2) = 180^\circ$   
五角形の外角の和 360°  
が2つ 180°

③ △の外角は、となり合わない2つの内角の和と同じなのだから、この角度は∠a+∠cになる。  
△の外角も、となり合わない2つの内角の和と同じになるから、∠b+∠d+∠eになる。この三角形に∠a, ∠c, ∠d, ∠eが集まる。三角形の内角の和は180°。よって角の和は180°

(友達の考えのよいところは?)  
色を使ったり、図に描き加えたり

今までに習った三角形のことに比べて五角形のことに比べて分かりやすく  
とくためにたくさん利用されている。  
補助線を引かずにそのままの図で簡単に求めている。  
(今日の授業を通して考えたことや思ったことを書こう)

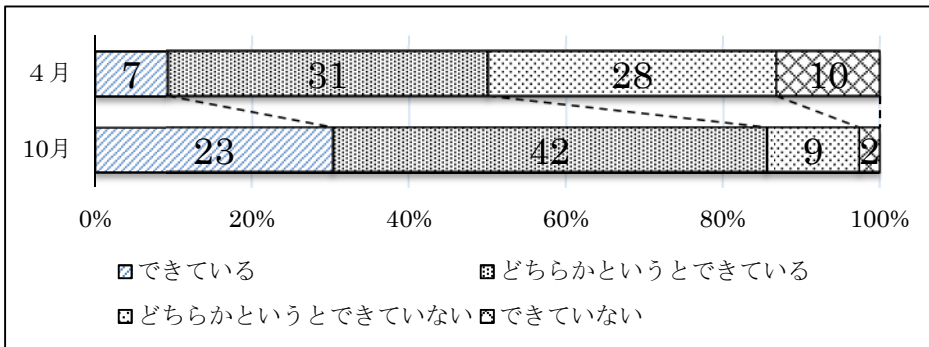
予想を立てて、すぐに図を見て考えるのではなく、どうすれば答えが導けるのか見通しや方針を立ててから説明をする。順序立てることでできてより分かりやすい説明になることが分かりました。また、その元の図形は、どんな図形とどんな図形が組み合わさってできているかや、補助線をひいてそこからできる図形を考えると、他の図形の性質が使える簡単な説明ができる。

資料2 ルーブリック評価Aの生徒のワークシート

(5) 考察

下のグラフは、第2学年79人に対して4月と10月に実施したアンケートについて比較したものである。(79人中有効回答76人)

○相手に論理的に(筋道をたてて、分かりやすく)伝えることができている



肯定的な評価が4月と比較して27%増加し、否定的な評価が11%にとどまった。パフォーマンス課題においても、問題把握の場面において問答ゲームを通して要素を明らかにしたことで、要素を用いて説明を組み立てることができていたようである。パフォーマンス課題におけるルーブリックの評価においても、9割以上の生徒が要素や根拠を基に説明できていた。

また、アンケートにおける次の2項目の内容や、授業における問答ゲームでの生徒の観察から、問題場面を把握する際に有効であったと考えられる質問や要素の捉え方を抽出する。

また、アンケートにおける次の2項目の内容や、授業における問答ゲームでの生徒の観察から、問題場面を把握する際に有効であったと考えられる質問や要素の捉え方を抽出する。

① 場面を正しく捉えるための、状況説明や問答ゲームを通して、論理的に考えたり表現したりすることができるようになったことはありますか。

- ・「なぜ」「どのように」というところをあやふやにせず明確にできるようになった。
- ・図や表、分かっている情報の整理や大切な情報を見分けられるようになった。
- ・最初に内容を整理して、筋道立てて解決できるようになった。
- ・図形で読み取れる点について、どの部分に、どんな特徴があるのかを具体的に説明できるようになった。

解決の方法を振り返り、要素に着目した解決の修正・改善を図っている

② あなたは、授業において問題解決をしていくときに、どのような解決の仕方をしていきますか。

- ・土台から考えて（どのような考え方にするか）（視点を変えてみる）その考え方が実現可能か考えてから問題解決をする。
- ・問題で聞かれていることを理解し、それに対してどのような考え方をすればいいか考えて答えを出す。
- ・まず、「どこが分かれば分かるのか」ということを見つけて、それが見つかったら、それは「どの方法を使うのか」を考える。
- ・分かっている情報と分からない情報を明確にしてから、数学的な関係にあるものを見つけていく。

（効果があつたと考えられる、主な質問や要素の捉え方）

- 「問題で分かっていることは何か？」 →重要な要素や仮定，既習事項を明確にする。
- 「問題で求めることは何か？」 →結論を明確にする。
- 「図形でいうと，どういうことなのか？」 →文章から図形における要素や意味に解釈し直す。
- 「どの部分のことなのか？」 →解決につながる重要な要素を明確にする。
- 「なぜそういえるのか？」 →根拠を明らかにし，説明の筋道を立てる。
- 「どのように解決するのか？」 →要素や根拠を手順に従って整理する。

つまり，問題把握の場面で，上記のような質問を意識した問答ゲームを行うことで，問題の要素や数学的な見方や考え方が明確になり，論理的な説明をしていくことができるのではないかと考える。

#### 4 成果と課題（○は成果，●は課題）

- 問題場面の把握において，要素に着目した問答ゲームを行うことは，事象を数理的に捉えることや，根拠を基に筋道立てて説明していく上で効果的な方法であるという示唆を得た。
- 問答ゲームにおける質問には，問題における重要な要素を見いだすことや，数学的な見方や考え方の活用につながる有効なものがあることが分かった。
- 問題にひそむ要素と数学的な見方や考え方の関連が明確でなく，効果の因果関係を十分に示すことができなかった。
- パフォーマンス課題が数学の内容に近く，身近にある問題の解決にこの取組が効果があることを示すまでには至っていない。
- まとめノートについてはこれからの取組を積み重ねて，その検証をしなくてはならない。  
この取組はまだ途中段階であり，今後の研究において，課題に挙げた事項や，考察で得たことが本当に効果があるのかについて明らかにしていくことで，生徒がこれから出会うであろう様々な問題について，要素や数学的な見方や考え方を見だし，身に付けた問題解決の方法を活用して解決していけるようにしたい。

#### 参考文献

- 西岡加名恵（2008）『『逆向き設計』で確かな学力を保障する』明治図書  
（2016）「資質・能力を育てるパフォーマンス評価」明治図書  
片桐重男（2004）「数学的な考え方の具体化と指導」明治図書  
狩野みき（2013）「世界のエリートが学んできた『自分で考える力』の授業」日本実業出版社  
（2013）「世界のエリートが学んできた自分の考えを『伝える力』の授業」  
日本実業出版社